Четвертая Азиатская Региональная Конференция.

Бангкок, Таиланд, 1971

М.В.МАЛЫШЕВ,
доктор технических наук.
Научно-Исследовательский
Институт Оснований и подземных сооружений.
Москва, СССР

О МЕТОДИКЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УГЛА ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ И УДЕЛЬНОГО СЦЕПЛЕНИЯ ГРУНТОВ ПРИ РАЗЛИЧНОМ ВИДЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ.

А Н Н О Т А Ц И Я .

Как показывают эксперименты, угол внутреннего трения и удельное сцепление, обычно принимаемые в качестве характеристик сопротивляемости сдвигу грунтов, зависят от вида напряженного состояния, при котором они определяются. На их величину оказывает влияние соотношение между промежуточным и двумя другими - максимальным и минимальным главными напряжениями в предельном состоянии. Поэтому предлагается условие прочности и характеристики прочности, инвариантные относительно напряженного состояния. Описывается физическая концепция, позволяющая уяснить это влияние промежуточного главного напряжения на результаты определения сопротивляемости сдвигу. Приводится методика обработки данных эксперимента по определению сопротивляемости сдвигу грунта с учетом различия в виде напряженного состояния и даются расчетные формулы.

Прочностными характеристиками грунтов, которые входят в условие предельного равновесия Мора, имеющего следующий вид

$$\sigma_1 - \sigma_3 = (\sigma_1 + \sigma_3 + 2c\,ctg\,\varphi)\sin\varphi \qquad (I)$$

являются, как известно, угол внутреннего трения φ и сцепление c. Из условия (I) вытекает, что промежуточное главное напряжение σ_2 при $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$ не влияет на прочность грунта.

В то же время ряд экспериментальных исследований, проведенных как с песчаными грунтами (Киркпатрик, Ломизе-Крыжановский, Строганов, Хон-Им Ко-Скотт, Корнфорс, Фрадис, Малышев), (Малышев, 1968), так и с глинами (Сибата-Карубэ, 1965), свидетельствуют о том, что величина промежуточно главного напряжения σ_2 влияет на прочность грунта и оно, тем самым, должно входить в условие прочности. Таким образом оказалось, что характеристики прочности грунта, которые должны не зависеть от вида напряженного состояния, то-есть от величины σ_2, на самом деле зависят от нее и, поэтому, они не могут выполнять роль характеристик, поскольку характеристики должны быть инвариантными относительно напряженного состояния. Кроме широко распространенного условия прочности (I) для того, чтобы приблизится к данным экспериментов, предлагались иные условия, уже учитывающие промежуточное главное напряжение. Одним из таких условий было условие Мизеса-Боткина, имеющее следующий вид (Малышев, Фрадис, 1968):

$$\frac{\sqrt{3}(3 - \sin\varphi_0)}{2\sin\varphi_0}\sqrt{J_2} - J_1 = 3c_0 \cdot ctg\,\varphi_0 \qquad (2)$$

где φ_0 и c_0 – характеристики, внешне аналогичные φ и c в зависимости (I), а кроме того

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$
$$J_2 = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] \qquad (3)$$

Отметим,что при $\sigma_2 = \sigma_3$,то есть зависимости,свойственной испытанию в приборе трехосного сжатия φ_o и C_o в (2) соответственно совпадут с φ и C в (I),но только при $\sigma_2 = \sigma_3$. Различные по виду условия прочности предлагались и другими исследователями. В эти условия входит величина промежуточного главного напряжения σ_2 ,поскольку об этом свидетельствуют опытные данные. Среди них назовем условия Ломизе и Крыжановского,Малышева,Гениева,в которые входит величина σ_2. Следует заметить,что условие Ломизе-Крыжановского, имеющее довольно сложный вид,приводится к тому,что огибающая предельных кругов Мора должна быть криволинейной.Условия же (I), (2) и предложенное нами условие (Малышев,1963),записываемое следующим образом

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3 + 2\bar{c} \cdot ctg\rho} = \frac{\sin\rho}{X} + (1-X)\frac{(\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_3)\ \sin\rho}{(\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_1+\sigma_3+2\bar{c}\cdot ctg\rho)} \tag{4}$$

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$$

имеют в основе прямолинейную огибающую предельных кругов Мора. В отличие от условия (I),в зависимость (4) входят не два,а три параметра,определяющих прочность грунта,которые не зависят от напряженного состояния грунта,а зависят лишь от его физического состояния (плотность,влажность). Этими независящими от соотношения напряжений параметрами являются ρ , $\bar{c}$ и X . Эти параметры имеют следующий физический смысл. В теории предельного равновесия предполагается,что поверхности скольжения представлены абсолютно гладкими поверхностями,составляющими определенные углы с осями главных напряжений.Реальная же сыпучая среда состоит из отдельных частиц различной шероховатости (Рис.I) и сдвиг между ними возможен только по поверхности контакта, которая не совпадает в каждом отдельном случае с той идеальной поверхностью, которая мыслится в теории. Однако в среднем такое совпадение имеет место (Малышев, 1963). С учетом указанного обстоятельства и была выведена зависимость (4), которая при $X = 1$ переходит в зависимость (I). Параметр X равен

$$X = \frac{\sin 2\Delta_1}{2\Delta_1} \leq 1 \tag{5}$$

где Δ_1 - максимальный угол отклонения действительных площадок скольжения от идеальных. Этот параметр определяется экспериментально. Как это сделать, будет показано ниже. Угол ρ можно определить как угол трения материала частиц. Поэтому $\rho < \varphi$. И, наконец, $\bar{c}$ - это удельное сцепление в предположении абсолютно гладкой поверхности, вдоль которой оно действует. Действительно, если поверхность сдвига абсолютно гладкая, то $X = 1$ и тогда условие (4) совпадет с (I) и мы получим $c = \bar{c}$, $\rho = \varphi$. Условие (4) может быть представлено и в другом виде, если воспользоваться величинами J_1 и J_2 по (3) и параметром Лоде μ, равным

$$\mu = \frac{2\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_3)}{\sigma_1 - \sigma_3} \tag{6}$$

После небольших преобразований вместо (4) будем иметь следующее

$$\frac{3\sqrt{J_2}}{\left[\left(\frac{J_1}{3} + \bar{c}\cdot ctg\rho\right)\sqrt{3(3+\mu^2)} - \mu\sqrt{J_2}\right]} = \frac{\sin\rho}{X} +$$

$$+ (1-X)\cdot\frac{3(1-\mu^2)\sqrt{J_2}\,\sin\rho}{4\left[\left(\frac{J_1}{3} + \bar{c}\cdot ctg\rho\right)\sqrt{3(3+\mu^2)} - \mu\sqrt{J_2}\right]} \tag{7}$$

Если ввести величины φ_o и C_o, которые будут внешне аналогичны φ и C в (I), но будут соответствовать значению μ = -I, то-есть $\sigma_2 = \sigma_3$ или трехосному сжатию, то получим, что при μ = -I

$$\sin\varphi_o = \frac{\sin\rho}{X}\ ; \qquad C_o = \bar{C}\,\frac{ctg\,\rho}{ctg\,\varphi_o} \tag{8}$$

Условие (7) можно, путем преобразований, привести к следующему более простому виду

$$\frac{3}{\sqrt{3(3+\mu^2)}\,\frac{\sin\rho}{X}}\left[3+\mu\,\frac{\sin\rho}{X}-\frac{3(1-X)(1-\mu^2)}{4}\right]\sqrt{J_2}-$$

$$-J_1=\bar{C}\,\frac{\sqrt{X^2-\sin^2\rho}}{\sin\rho} \tag{9}$$

где по-прежнему ρ, X и $\bar{C}$ - инвариантные относительно напряженного состояния характеристики прочности грунта. Воспользовавшись выражениями (8) преобразуем теперь (9) к более простому виду

$$\frac{3}{\sqrt{3(3+\mu^2)}\,\sin\varphi_o}\left[3+\mu\sin\varphi_o-\frac{3(1-X)(1-\mu^2)}{4}\right]\sqrt{J_2}-J_1=3C_o\,ctg\,\varphi_o \tag{10}$$

где φ_o и C_o имеют тот же смысл, что и ранее, а μ - параметр Лоде. Рассмотрим зависимость (10) при некоторых частных видах напряженного состояния. Как уже отмечалось, в приборе трехосного сжатия имеет место соотношение $\sigma_2 = \sigma_3$ и, следовательно, из (6) получаем μ = -I. Если использовать прибор по определению прочности грунта кручением при гидростатическом обжатии, то в этом случае $\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$ и μ = 0. Промежуточное значение μ дает, по опытам Корнфорса

(Корнфорс,1964),случай плоской деформации,в котором для пористости песка ε_o = 0,65 получено μ = -0,54. Опыты,проведенные с одним и тем же песком,показали,что в трехосном приборе при гидростатическом обжатии I кг/см^2 предельное значение σ_1 = = 3,I2 кг/см^2,а при гидростатическом обжатии в приборе по кручению I кг/см^2 получено после обработки,что предельные значения σ_1 = I,575 кг/см^2 и σ_3 = 0,425 кг/см^2. Подставляя эти значения в (3) и затем полученные величины в (I0),будем при C_o = 0 иметь два уравнения для вычисления X и $\sin \varphi_o$,решив которые совместно,найдем $\sin \varphi_o$ = 0,5I5,то-есть φ_o = 3I$^\circ$ и X = = 0,57.

Теория предельного равновесия разработана в настоящее время применительно к условиям плоской задачи и осесимметричной задачи. В основе этой теории заложено условие прочности Мора (I). Для того,чтобы получить соответствие между теорией и экспериментом, в основу теории предельного равновесия следовало бы заложить не зависимость (I),а зависимость (4) и проводить решение применительно к ней. Однако полученные ранее на основе зависимости (I) решения задач теории предельного равновесия можно считать справедливыми и при применении зависимости (4) тогда,когда в пределах задачи сохраняется условие μ = $Const$. Последнее справедливо и в осесимметричной задаче и в плоской задаче,однако в каждой из них величина μ имеет свое значение (в осесимметричной задаче μ = -I). Таким образом,для того,чтобы уже имеющиеся результаты решений задач теории предельного равновесия сыпучей среды могли быть использованными в практике,поскольку,как оказалось, угол внутреннего трения φ и удельное сцепление c зависят от вида напряженного состояния, необходимо было бы производить определение этих „характеристик" только при том виде напряженного состояния, при котором они будут использоваться в расчете - для осесимметричной задачи на трехосном прибора, для плоской задачи в условиях плоской деформации. Однако с помощью предлагающегося условия (10), обоснованного экспериментально, можно производить пересчет, определив φ и c при одном виде напряженного состояния, для другого вида напряженного состояния, то-есть не обязательно, чтобы μ в опыте и расчете имело одно и то же значение. При этом следует помнить, что φ и c, установленные таким образом, не являются инвариантными характеристиками прочности в том смысле, какой в них вкладывался ранее, а аналогия между ними и действительными характеристиками, входящими в условие (4), носит формальный характер.

Преобразуем условие (I) с помощью зависимостей (3) в следующее

$$\frac{3(3+\mu \sin \varphi_M)}{\sqrt{3(3+\mu^2)}\sin \varphi_M}\sqrt{J_2} - J_1 = 3C_M \cdot \operatorname{ctg} \varphi_M \qquad (II)$$

где φ_M и C_M - соответственно угол внутреннего трения и удельное сцепление по Мору, как ранее считалось, величины не зависящие от μ. Теперь остается приравнять коэффициенты при $\sqrt{J_2}$ в зависимостях (10) и (II) и тогда мы получим связь между φ_M - то-есть углом внутреннего трения по Мору, который мы должны использовать в теории предельного равновесия сыпучей среды в качестве условной характеристики прочности грунта и тем же углом при трехосном сжатии ($\mu = -1$) то-есть

$$\varphi_M = \varphi_0 \quad \text{при} \quad \mu = -1.$$

Произведя существенные преобразования, получим, что

$$\sin\varphi_M = \frac{4\sin\varphi_0}{4-(1-X)(1-\mu^2)} \tag{12}$$

Из этой зависимости легко установить, что φ_M достигает максимума при $\mu = 0$, то-есть при

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\,(\sigma_1 + \sigma_3)$$

Далее, используя зависимость (12) и приравнивая правые части уравнения (11) и (10), будем иметь

$$C_M = C_0\,\frac{ctg\,\varphi_0}{ctg\,\varphi_M} \tag{13}$$

или

$$C_M = C_0\,\frac{4\cos\varphi_0}{\sqrt{16\cos^2\varphi_0-(1-X)(1-\mu^2)[8-(1-X)(1-\mu^2)]}} \tag{14}$$

Таким образом оказывается, что $\varphi_M \geq \varphi_0$ и $C_M \geq C_0$.

Аналогичные выкладки можно было бы сделать и применительно к теории прочности Мизеса-Боткина. В этом случае мы бы получили

$$\sin\varphi_M = \frac{6\sin\varphi_0}{(3-\sin\varphi_0)\sqrt{3+\mu^2}-2\mu\sin\varphi_0} \tag{15}$$

$$C_м = C_o \frac{6\cos\varphi_o}{\sqrt{\left[(3-\sin\varphi_o)\sqrt{3+\mu^2}-2\mu\sin\varphi_o\right]^2-36\sin^2\varphi_o}} \quad (16)$$

Как было нами показано, теория прочности Мизеса-Боткина свидетельствует о большом влиянии σ_2 на прочность, значительно большем, чем вытекает из экспериментов. В связи с этим, если считать, что грунт подчиняется условию прочности Мизеса-Боткина, то можно было бы создавать вертикальные песчаные откосы неограниченной высоты, что, очевидно, лишено смысла (Малышев, 1969). Поэтому мы не рекомендуем условия (1) и (2) для практического использования, а считаем целесообразным использовать зависимости (12) и (14). В рассмотренном выше примере $\varphi_o = 31^o$ и $\chi = 0,57$.

Тогда

$$\sin\varphi_м = \frac{2,06}{0,57 + 0,43\mu^2}$$

При $\mu = -0,54$ - плоская деформация, получим $\varphi_м = 34^o20$ и при $\mu = 0$ (кручение с гидростатическим обжатием) $\varphi_м = 35^o20$. Для удельного сцепления будем иметь по (14)

$$C_м = C_o \frac{3,43}{\sqrt{8.49 + 3,08\mu^2 + 0,18\mu^4}}$$

При $\mu = -0,54$ имеем $C_м = 1,12\,C_o$ и при $\mu = 0$ $C_м = 1,18\,C_o$

Таким образом, мы видим, что в случае плоской деформации следует вместо угла $\varphi_o = 31^o$, определенного в опыте на трехосное сжатие, в расчет подставлять $\varphi_м = 34^o20$, что практически совпадает с рекомендацией норм Дании (Code, 1966) в части повышения угла на 10%.

Методика обработки данных опытов рекомендуется следующая. Для идеально сыпучего грунта необходимо, как минимум, два опыта при различных видах напряженного состояния, например один опыт на трехосном приборе, обозначаемый индексом (I) и один опыт на приборе по кручению при гидростатическом обжатии - индекс (2). Если грунт обладает связностью, то требуется еще один опыт (3) тоже на приборе трехосного сжатия, но с другой величиной обжатия, чем в опыте (I). Тогда из уравнения (I0) получим систему уравнений, решая которую найдем

$$\sin\varphi_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2\dfrac{J_1^{(1)} - J_1^{(3)}}{\sqrt{J_2^{(1)}} - \sqrt{J_2^{(3)}}} + \sqrt{3}} \tag{I7}$$

$$\chi = \frac{2(3 - \sin\varphi_0)\sqrt{J_2^{(1)}}}{\sqrt{3J_2^{(2)}}} - \frac{4(J_1^{(1)} - J_1^{(2)})\sin\varphi_0}{3\sqrt{J_2^{(2)}}} - 3 \tag{I8}$$

$$C_0 = \frac{3 - \sin\varphi_0}{2\sqrt{3}\cos\varphi_0}\sqrt{J_2^{(3)}} - \frac{1}{3}J_1^{(3)}\,tg\,\varphi_0 \tag{I9}$$

Если грунт сыпучий, то следует принять $J_1^{(3)} = J_2^{(3)} = 0$.

Рассмотрим случай, когда грунт идеально связный, то-есть $\varphi_0 = 0$. Тогда

$$\chi_{\varphi_0=0} = \frac{2\sqrt{3J_2^{(1)}}}{\sqrt{J_2^{(2)}}} - 3 \tag{20}$$

$$C_{0\,\varphi_0=0} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{J_2^{(3)}} \tag{21}$$

Определив φ_0, X и C_0 из (17)-(19) или (20), (21), далее следует воспользоваться выражениями (12) и (14) для отыскания $\varphi_м$ и $C_м$.

В заключение укажем, что условия прочности включают в себя только напряжения. В то же время мы часто судим о предельном состоянии по деформациям по тому, когда малому приращению напряжений будут соответствовать значительные приращения деформаций. Казалось бы, что условие предельного состояния должно было бы включать в себя и деформации. Однако, если у нас имеется однозначная связь между напряжениями и деформациями, то мы можем условие предельного состояния записать либо в напряжениях, либо в деформациях, либо комбинировать одно с другим, и все это будет равносильно. В некоторых теориях, например у Боткина (1940) считается, что разрушение происходит при бесконечно больших деформациях. Это вытекает из принятой им в качестве аппроксимирующей для связи напряжения - деформации дробнолинейной функции. Однако можно воспользоваться и другими функциями и считать, что разрушение происходит при конечных деформациях. Но, при решении любой задачи, имея связь между напряжениями и деформациями, можно последние исключить и притти к условию прочности в напряжениях.

Выводы.

I. Если принять гипотезу о том, что реальные площадки сдвига не совпадают с идеальными, образующими поверхность скольжения, то легко объясняется влияние промежуточного главного напряжения σ_2 на прочность грунта при использовании гипотезы Кулона. Получено, что с увеличением отношения σ_2/σ_3 прочность грунта растет, достигая максимума при $\sigma_2 = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3)$

2. Угол внутреннего трения φ и сцепление C, являются основными характеристиками прочности грунта, используемыми в теории предельного равновесия сыпучей среды. Однако, как показывают эксперименты, они не являются инвариантными относительно напряженного состояния и, поэтому, могут служить характеристиками прочности лишь формально. Их следует определять либо при том виде напряженного состояния, при котором они в последующем будут использоваться в расчете, либо необходимо производить их пересчет по формулам (I2) и (I4) для другого значения μ, которое характерно для рассматриваемой задачи теории предельного равновесия сыпучей среды. Такое преобразование правомочно постольку, поскольку в пределах рассматриваемой задачи μ постоянно. Последнее справедливо и для осесимметричной и для плоской задачи, для которых разработаны решения многих задач теории предельного равновесия.

3. Значения φ_M и C_M при плоской деформации более высокие, чем при трехосном сжатии.

4. Для определения φ_M и C_M требуется как минимум три опыта, причем два из них должны быть проведены при различном виде напряженного состояния. Характеристики, отвечающие значениям $\mu = -I$ и $\mu = +I$, совпадают.

5. Вместо условия прочности (I) более правильно использовать в дальнейшем при решении задач предельного равновесия условие прочности (4), имеющее три характеристики прочности.

М. Шмыкин

ЛИТЕРАТУРА.

Малышев М.В. (1968) Об обобщении условия прочности Мора-Кулона для грунтов. Труды Геотехнической Конференции, Осло, 1967, том 2, стр. 219-220.

Сибата Т., Карубэ Д. (1965). Влияние изменения промежуточного главного напряжения на механические свойства нормально консолидированных глин. Труды VI Международного Конгресса по механике грунтов и фундаментостроению, Канада, том I, стр. 359-363.

Малышев М.В., Фрадис Э.Д. (1968). Условия прочности песчаных грунтов. Труды III Будапештского Совещания по механике грунтов, том 63 (I-4), стр. 167-175.

Малышев М.В. (1963). О влиянии среднего главного напряжения на прочность грунта и о поверхности скольжения. Ж-л "Основания, фундаменты и механика грунтов", № I, стр. 7-II.

Корнфорс Д. (1964) Некоторые исследования по вопросу влияния условий деформирования на прочность песка, Гостехника, № 2, стр. 143-167.

Малышев М.В. (1969). Об использовании для сыпучих грунтов условия прочности Губера-Мизеса-Боткина. Ж-л "Основания, фундаменты и механика грунтов", № 5, стр. 3-5.

Н о р м ы (1966) - Практические нормы по проектированию оснований. Бюллетень № 22 Датского Геотехнического Института, Копенгаген.

Боткин А.И. (1940) О прочности сыпучих и хрупких материалов. Известия ВНИИГ, том 26, Ленинград.