

Ю. К. ЗАРЕЦКИЙ, д-р техн. наук; Э. И. ВОРОНЦОВ, канд. техн. наук (НИСГидропроекта);
М. В. Малышев, д-р техн. наук; проф. И. Х. РАМАДАН, канд. техн. наук (МИСИ)

Деформируемость и прочность песчаного грунта в условиях плоской деформации при различных траекториях нагружения

Напряженно-деформированное состояние грунта в основании крупных промышленных, гражданских, гидротехнических сооружений часто отвечает условиям плоской деформации. Однако деформационные и прочностные характеристики грунта, используемые в инженерных расчетах, обычно определяются на приборах трехосного сжатия и полученные в этих опытах величины не корректируются. Необходимость корректировки указанных характеристик применительно к случаю плоской деформации вытекает из результатов исследований [1, 2] и др.

Исследования авторов проводились на мелком однородном песке при трех начальных состояниях по плотности, характеризующихся относительной плотностью $I_D = 0,8; 0,55; 0,23$ где

$$I_D = \frac{e_{\max} - e}{e_{\max} - e_{\min}}$$

Удельный вес песка $26,6 \text{ кН/м}^3$, коэффициент пористости $e_{\max} = 0,89$ и $e_{\min} = 0,56$, коэффициент неоднородности 1,7. Опыты выполнялись на экспериментальном стенде конструкции Крыжановского — Воронцова [3], который позволяет задавать независимо три главных напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и определять соответствующие им деформации при испытании кубического образца с длиной ребра 10 см. Для проведения опытов по схеме плоской деформации в приборе исключалась возможность деформирования по одному из направлений, а возникающее при этом напряжение измерялось тензодатчиками.

В работе использовались следующие инварианты напряженно-деформированного состояния: $\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ — среднее напряжение;

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

интенсивность касательных напряжений; $\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$

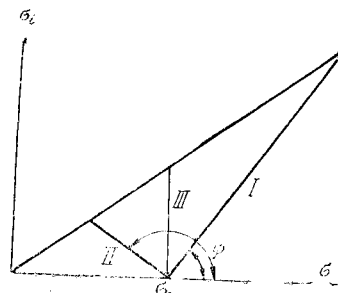


Рис. 1. Траектории нагружения I, II, III серий опытов в координатах: интенсивность касательных напряжений σ_i — среднее напряжение σ

при условии $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ — параметр вида напряженного состояния; $\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ — объемная деформация;

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$$

— интенсивность деформации сдвига; $\mu_\sigma = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}$

при $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ — параметр вида деформированного состояния.

Были выполнены три серии опытов (рис. 1), из которых две проведены по схеме плоской деформации. В серии I после всестороннего обжатия до $\sigma_0 = 40, 80, 160$ кПа при $I_D = 0,8$ и $\sigma_0 = 40, 80, 120$ кПа при $I_D = 0,55$ и $0,23$ исключалась деформация в одном из боковых направлений, по которому фиксировалось реактивное напряжение σ_2 , другое боковое напряжение σ_3 поддерживалось постоянным, а вертикальное напряжение σ_1 постепенно увеличивалось до разрушения. В серии II всестороннее нагружение осуществлялось до $\sigma_0 = 160, 320$ и 480 кПа. Затем на этапе нагружения в условиях плоской деформации σ_1 оставалось неизменным, а σ_3 уменьшалось до разрушения. Очевидно, что траектория нагружения при плоской деформации в координатах $\sigma - \sigma_i$ зависит не только от порядка изменения напряжений σ_1 и σ_3 , но и от деформационных свойств испытываемого грунта, влияющих на σ_2 . Опыты показали, что траектории серий I и II практически линейны и их можно характеризовать углом наклона ψ к положительному направлению оси σ . В опытах чистодевiatorного нагружения (серия III) поддерживалась постоянной величина $\sigma = 80, 160$ и 320 кПа при $\mu_\sigma = -1$.

На рис. 2 в качестве примера приведены результаты опытов с плотным песком ($I_D = 0,8$) по траектории I (сплошные линии).

Анализ деформационных свойств песка выполнен путем установления зависимости модулей сдвига G и объемной деформации K от инвариантов напряженно-деформированного состояния. При этом

$$G = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i(\sigma, \sigma_i)} \quad \text{и} \quad K = \frac{\sigma}{\varepsilon_v(\sigma, \sigma_i)} \quad (1)$$

Для описания сдвиговой деформации использованы формулы, предложенные А. И. Боткиным [4]:

$$\sigma_i = \frac{\sigma_i^*}{B + \varepsilon_i} \varepsilon_i \quad \text{или} \quad G = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} = \frac{\sigma_i^*}{B + \varepsilon_i} \quad (2)$$

где $\sigma_i^* = \sigma \operatorname{tg} \rho$ — определяет прочность грунта согласно условию Мизеса-Шлейхера-Боткина;

B — коэффициент, численно совпадающий со значением ε_i при $\sigma_i = \frac{\sigma_i^*}{2}$.

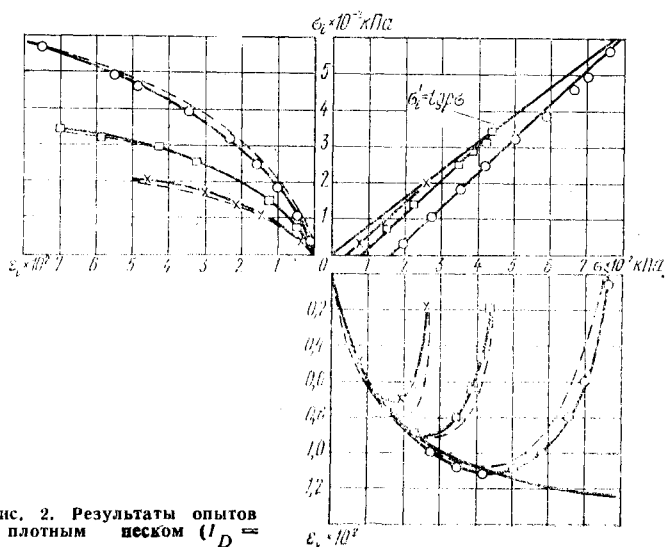


Рис. 2. Результаты опытов с плотным песком ($I_D = 0,8$) по траектории I

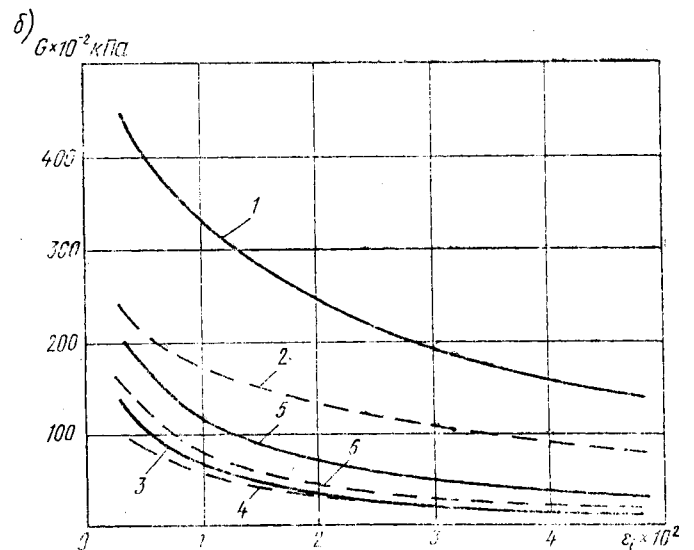
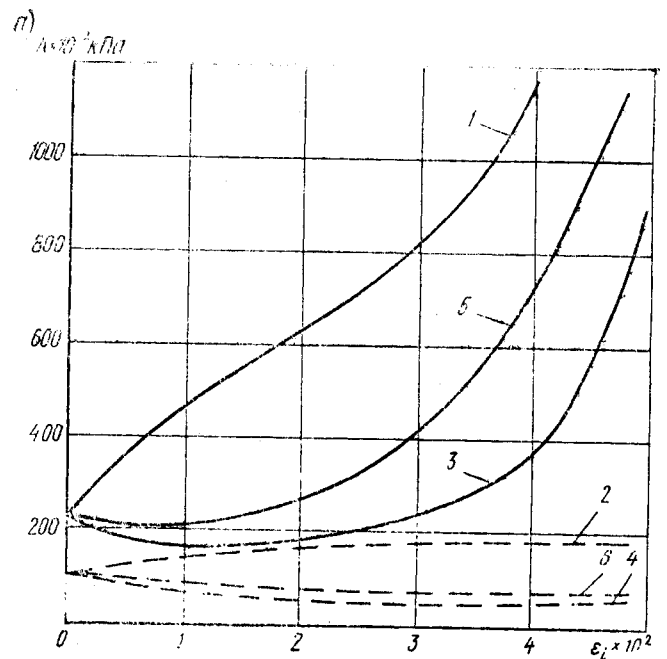


Рис. 3. Зависимость модулей а — объемного сжатия K от ε_i ; б — сдвига G от ε_i

Объемная деформация ε_v рассматривается как сумма объемной деформации при всестороннем обжатии ε_v^0 и дополнительной объемной деформации от действия девиатора напряжения ε_v^d . Деформация ε_v^0 может быть аппроксимирована формулой

$$\varepsilon_v^0 = \frac{\sigma}{\sigma a + b} \quad (3)$$

Для описания зависимости ε_v^d от ε_i предлагается соотношение:

$$\varepsilon_v^d = (\alpha \varepsilon_i^\beta + \lambda^* \varepsilon_i) \left[1 + \frac{\sigma}{p_a} \operatorname{tg} \rho (1 + \mu_\sigma) \right] \quad (4)$$

где α, β — экспериментальные параметры;

$\lambda^* = \frac{\Delta \varepsilon_v^d}{\Delta \varepsilon_i}$ — скорость дилатансии при разрушении;

σ и μ_σ — соответствуют текущему значению ε_i ; $p_a = 10^2$ кПа.

Для практического использования зависимости (2) и (4) необходимо дополнить уравнением траектории девиаторного нагружения:

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_i \operatorname{ctg} \psi. \quad (5)$$

Все коэффициенты, входящие в вышеприведенные формулы, представлены в табл. 1. В табл. 2 даны осредненные по каждой группе опытов зависимости μ_σ от ε_i .

На рис. 2 пунктиром показаны зависимости деформации сдвига и объема, рассчитанные по формулам (2) — (5).

На рис. 3 приведены расчетные зависимости модулей K и G от деформации сдвига. Расчеты выполнены для траекторий I, II и III при $\sigma_0 = 200$ кПа. Траектории нагружения и плотности песка, соответствующие кривым на рис. 3, можно определить по номерам из последней графы табл. 1.

Из графиков следует, что значения K и G для исследованных траекторий плоской деформации различаются в 3—4 раза. Такую разницу можно объяснить [5] влиянием на деформации траектории нагружения и вида напряженного состояния.

Скорость дилатансии при разрушении λ^* , по данным экспериментов (см. табл. 1), существенно зависит не только от плотности песка, но и от траектории нагружения и вида напряженного состояния. Это обстоятельство важно потому, что некоторые предложения по формулировке неассоциированного закона пластического течения [6] основаны на введении в качестве постоянного параметра предельной скорости дилатансии.

По результатам опытов было определено отношение $\sigma_2/(\sigma_1 + \sigma_3)$, показанное в зависимости от деформации ε_i на рис. 4, а, б (кривые 2), откуда следует, что это отношение практически во всем диапазоне изменения ε_i , вплоть до предельного состояния, остается постоянным и не зависит от траектории нагружения. Прослеживается зависимость этого отношения от начальной плотности песка. Считая, что общая деформация грунта состоит из упругой и пластической частей

Таблица 1

Траектория	I_D	Коэффициенты формул (1)÷(4)								Номера кривых на рис. 3
		a	$b \cdot 10^{-2}$ кПа	α	β	λ^*	$\operatorname{tg} \rho$	B	$\operatorname{ctg} \psi$	
I	0,80	66,9	103	0,085	0,82	-0,18	0,775	0,003	1,07	1
	0,55	37,7	64,2	0,04	0,75	-0,09	0,73	0,004	1,04	2
	0,23	30,4	44,4	0,015	0,59	-0,024	0,70	0,006	0,97	
II	0,80	66,9	103	0,104	0,76	-0,27	0,73	0,005	-1,11	3
	0,55	37,7	64,2	0,047	0,615	-0,16	0,68	0,006	-1,11	4
	0,23	30,4	44,4	0,04	0,58	-0,04	0,65	0,008	-1,15	
III	0,80	66,9	103	0,038	0,49	-0,34	0,87	0,005	0,0	5
	0,55	37,7	64,2	0,025	0,50	-0,14	0,80	0,006	0,0	6
	0,23	30,4	44,2	0,045	0,57	-0,004	0,76	0,009	0,0	

Таблица 2

Траектория	I_D	Значения μ_σ при ε_i				
		0,005	0,01	0,02	0,03	0,05
I	0,80; 0,55	-0,79	-0,68	-0,58	-0,53	-0,50
	0,23	-0,75	-0,64	-0,52	-0,45	-0,40
II	0,80; 0,55	-0,30	-0,30	-0,30	-0,20	-0,30
	0,23					

Таблица 3

I_D	Угол φ для траекторий, град			$\varphi_I - \varphi_{III}$ φ_{III} %	$\varphi_{II} - \varphi_{III}$ φ_{III} %
	I	II	III ($\mu_\sigma = -1$)		
0,80	41,5	42	37	12	13,5
0,55	39	39	34,5	14	14
0,23	37	37	32,5	15	15

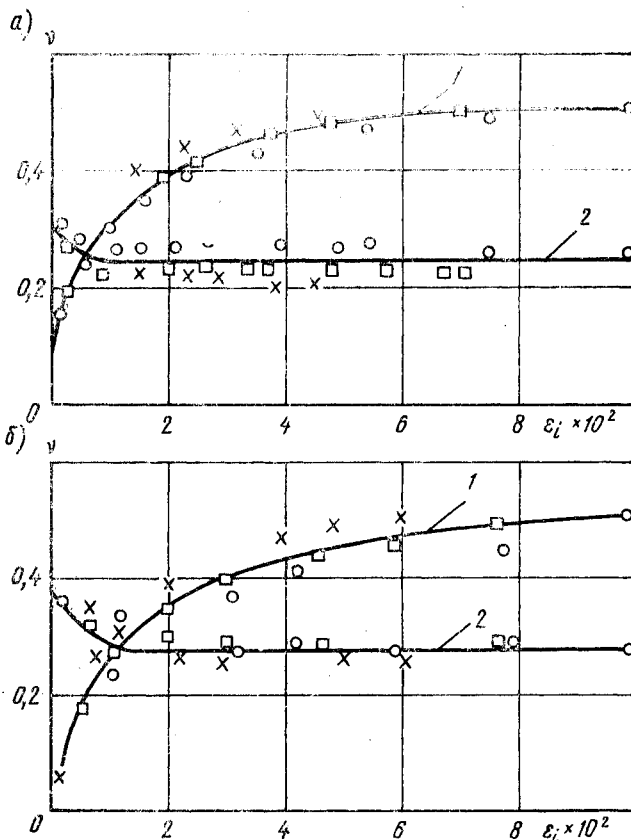


Рис. 4. Зависимость коэффициента Пуассона ν от ε_i

а — траектория I; б — траектория II;
1 — по формуле (7); 2 — по формуле (6)

и полагая, что в направлении действия σ_2 упругая составляющая деформации равна нулю, можно на основании закона Гука вывести соотношение

$$\nu^{(e)} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_3} = \operatorname{const}, \quad (6)$$

где $\nu^{(e)}$ — коэффициент Пуассона.

Следовательно, экспериментальные значения отношения $\sigma_2/(\sigma_1 + \sigma_3)$ могут быть интерпретированы как значения упругой характеристики материала — коэффициента Пуассона.

При использовании деформационной теории пластичности нелинейный параметр, которому обычно приписывают смысл коэффициента Пуассона, может быть выражен через напряжения σ_1 , σ_3 и общие деформации ε_1 , ε_3 на основании обобщенного нелинейного закона Гука (при условии $\varepsilon_2 = 0$) в виде

$$\nu = \frac{\varepsilon_1 \sigma_3 - \varepsilon_3 \sigma_1}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)(\sigma_1 + \sigma_3)}. \quad (7)$$

Из рис. 4 следует, что величина ν (кривая 1) изменяется в процессе нагружения от значения, близкого нулю, до 0,5 и не является, в отличие от $\nu^{(e)} = \sigma_2/(\sigma_1 + \sigma_3)$, коэффициентом Пуассона.

Полученное в опытах постоянство коэффициента Пуассона ν имеет практическое значение для расчетов напряженно-деформированного состояния и оценки устойчивости сооружений, работающих в условиях плоской деформации [7]. Если алгоритм такого расчета основан на теории пластического течения с упрочнением, то возникает принципиальный вопрос, от которого зависит количественная оценка устойчивости сооружения: следует ли при формулировке пластического потенциала использовать критерий прочности грунта в форме Мизеса — Шлейхера (с учетом влияния промежуточного главного напряжения σ_2) или в форме Мора — Кулона, либо Хилла (не учитывающих влияние σ_2). В условиях плоской деформации $\varepsilon_2 = \varepsilon_2^{(e)} + \varepsilon_2^{(p)} = 0$, где $\varepsilon_2^{(e)}$ и $\varepsilon_2^{(p)}$ — упругая и пластическая составляющие деформации в направлении σ_2 .

Выполнение этого очевидного равенства возможно при двух альтернативных условиях:

$$\varepsilon_2^{(e)} = -\varepsilon_2^{(p)} \text{ или } \varepsilon_2^{(e)} = \varepsilon_2^{(p)} = 0. \quad (8)$$

В первом случае необходимо использовать функцию нагружения, ассоциированную с условием Мизеса — Шлейхера (поскольку в этом условии присутствует компонента σ_2 и, следовательно, должно быть накопление деформации в этом направлении). Во втором случае, поскольку $\varepsilon_2^{(p)} = 0$, условие прочности применительно к случаю плоской деформации не должно включать промежуточного главного напряжения σ_2 .

Именно второй случай и реализуется при плоской деформации, что следует из постоянства в опытах коэффициента Пуассона. Расчеты [7] также показывают, что для определения устойчивости откосов в условиях плоской задачи критерий прочности Мизеса — Шлейхера, определенный при $\mu\sigma = -1$ и инвариантный к виду напряженного состояния, не может быть использован, так как в этом случае получаются предельные высоты насыпи, не согласующиеся с опытными данными. Исследование [8] по этому вопросу, выполненное с нескольких иных позиций, привело к такому же результату.

В табл. 3 приведены результаты определения прочности песка в испытаниях по трем траекториям, из которых следует, что траектория нагружения в условиях плоской деформации практически не влияет на прочность грунта. Однако в испытаниях по схеме плоской деформации угол внутреннего

трения на 12—15% выше, чем при осесимметричном сжатии.

Таким образом, результаты исследования показали, что для решения задач плоской деформации деформативные и прочностные характеристики должны определяться в соответствующих схемах испытания с учетом траектории нагружения, характерной для решаемой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cornforth D. H. Some experiments on the influence of strain conditions on the strength of sand. «Geotechnique», 1964, vol. 14.
2. Green G. E., Reades D. W. Boundary conditions anisotropy and sample shape effects on the stress-strain behaviour of sand in triaxial compression and plane strain. «Geotechnique», 1975, 25, № 2.
3. Ломизе Г. М., Крыжановский А. Л., Воронцов Э. И. Исследование закономерностей деформируемости и прочности грунтов при пространственном напряженном состоянии. — Труды к VII Международному конгрессу по механике грунтов и фундаментостроению. М., Стройиздат, 1969.
4. Боткина А. И. Исследование напряженного состояния в сыпучих и связных грунтах. — Известия ВНИИГ, 1939, т. 24.
5. Ломизе Г. М., Крыжановский А. Л. Основные зависимости напряженно-деформированного состояния и прочности песчаных грунтов. — Основания, фундаменты и механика грунтов, 1966, № 3.
6. Николаевский В. Н. Послесловие. Современные проблемы механики грунтов. В кн.: Определяющие законы механики грунтов. М., Мир, 1975.
7. Зарецкий Ю. К., Ломбардо В. Н., Грошев М. Е. Пластическое течение грунтовых материалов. — Известия вузов. Строительство и архитектура, 1979, № 2.
8. Малышев М. В. Об использовании для сыпучих грунтов условия прочности Губера—Мизеса—Боткина. — Основания, фундаменты и механика грунтов, 1969, № 5.