

В. Н. ШИРОКОВ, В. И. СОЛОМИН, М. В. МАЛЫШЕВ, Ю. К. ЗАРЕЦКИЙ

Напряженное состояние и перемещения весомого нелинейно-деформируемого грунтового полупространства под круглым жестким штампом

Экспериментальные исследования [1, 2] зависимости между напряжениями и деформациями в грунтовой среде указывают на ее нелинейность. На практике обычно пользуются линейной связью между напряжениями и деформациями. Это оправдано лишь при сравнительно небольшом диапазоне изменения действующих усилий. Решение задач для сплошной нелинейно-деформируемой среды весьма сложно, так как в этом случае необходимо интегрировать системы нелинейных дифференциальных уравнений. Замкнутые решения удалось получить для очень немногих частных задач с невесомой средой, например [3, 4], хотя известно, что влияние веса на напряженное состояние грунтов представляется весьма существенным [5].

Впервые, по-видимому, нелинейные зависимости между напряжениями и деформациями были получены для грунтов А. И. Боткиным [1]. Позднее разными исследователями были проведены эксперименты, уточнявшие эти зависимости для различного вида напряженного состояния, характеризуемого параметром Лоде [6], и предложены различные эмпирические формулы, описывающие опытные результаты. В расчете, результаты которого приводятся далее, принималось, что зависимость для сдвига нелинейна, в то время как объемное сжатие грунта происходит по линейному закону при модуле объемного сжатия $K=3\sigma/\epsilon=300 \text{ кг/см}^2$, где σ — среднее напряжение, ϵ — объемная деформация, равные

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3); \\ \epsilon &= \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3, \end{aligned} \right\} (1)$$

а $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ — соответственно главные напряжения и деформации. Предположение о возможности принятия постоянства модуля объемного сжатия было сделано еще Боткиным и подтверждено в опытах Э. Д. Фрадиса [7]. Для текущего модуля сдвига принята зависимость, аналогичная зависимости Боткина:

$$G = \frac{\sigma_i}{\epsilon_i} = \frac{A\sigma}{B + \epsilon_i}, \quad (2)$$

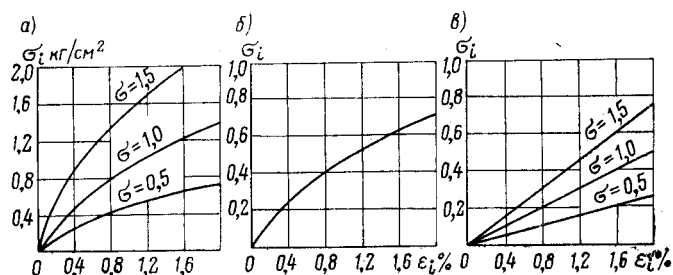


Рис. 1. Графики зависимости между σ_i и ϵ_i
 а — в форме (5,а); б — в форме (5,б); в — в форме (5,в)

где σ_i — интенсивность касательных напряжений и ϵ_i — интенсивность деформаций сдвига, причем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i^2 &= \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2], \\ \epsilon_i^2 &= \frac{2}{3} [(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2]. \end{aligned} \right\} (3)$$

Опытные параметры, входящие в (2) для песка средней плотности с объемным весом $1,66 \text{ г/см}^3$ равны $A=0,96$, $B=0,0075$. Таким образом, модуль сдвига оказывается функцией двух инвариантов напряжений, поскольку выражение (2) можно записать в виде

$$G = \frac{1}{B} (A\sigma - \sigma_i). \quad (4)$$

Для оценки влияния на результаты решения рассматриваемой задачи компонент, входящих в выражение (2), были приняты следующие зависимости для модуля сдвига:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } G &= \frac{0,96\sigma}{0,0075 + \epsilon_i}; & \text{б) } G &= \frac{2\sigma_0}{0,0075 + \epsilon_i}; \\ \text{в) } G &= 25\sigma, \end{aligned} \right\} (5)$$

где σ_0 — единичное давление, введенное для сохранения размерности, например $\sigma_0=1 \text{ кг/см}^2$.

Выражение (5,а) свидетельствует об увеличении модуля сдвига с ростом всестороннего обжатия и уменьшении его с возрастанием деформаций сдвига. Эта зависимость характерна для песчаного грунта и отвечает результатам экспериментов [7]. Выражение (5,б) характерно для связных грунтов, сопротивляемость сдвигу которых практически не зависит от величины обжатия. Наконец, формула (5,в) свидетельствует о росте модуля сдвига с увеличением всестороннего обжатия и независимости его от деформаций. Это выражение носит несколько искусственный характер, так как не дает выполаживания кривых $\sigma_i - \epsilon_i$ и имеет, в отличие от двух предыдущих, скорее теоретический интерес. Зависимости (5,а) и (5,б) позволяют осуществить переход к предельному состоянию при возрастании ϵ_i .

Все эти выражения иллюстрируются графиками, представленными на рис. 1.

Рассмотрим вопрос о коэффициенте Пуассона μ . Из зависимостей Генки, связывающих напряжения и деформации [6], и при принятых здесь обозначениях получим

$$\mu = \frac{K - 2G}{2(K + G)}. \quad (6)$$

Если для G воспользоваться, например, выражением (5,а) то получим, что μ может быть постоянным, если изменение модуля объемного сжатия K подобно изменению модуля сдвига G . Обычно, как показывают эксперименты, с ростом σ_i величина G уменьшается, а K либо постоянно, либо увеличивается. Характер изменения μ при G , определенном по выражению (5,а), приведен на рис. 2.

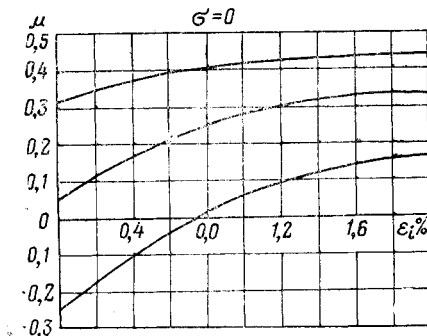


Рис. 2. Зависимость коэффициента Пуассона μ от ε_i для различных σ кривые сверху вниз $\sigma = 0,33 \text{ кг/см}^2$; $\sigma = 1,0 \text{ кг/см}^2$ и $\sigma = 2,33 \text{ кг/см}^2$

Ниже рассматривается задача о напряжениях и перемещениях нелинейно-деформируемого весомого полупространства, на поверхности которого расположен круглый жесткий центрально нагруженный штамп. Принято, что проокальзывание грунта под подошвой штампа отсутствует, т. е. нет горизонтальных перемещений по контакту грунта и штампа. Задача решена численно с использованием метода упругих решений А. А. Ильюшина [6] в сочетании с методом сеток. Отметим, что для решений нелинейных задач, связанных с расчетами оснований, Е. Ф. Винокуровым был ранее предложен метод решения, названный им «итерационным». Идея этого метода, который основан на использовании предложений Ильюшина и способа конечных разностей, изложена в работе [8].

Метод Ильюшина, как известно, сводит решение нелинейной задачи к последовательности линейных задач. При этом в каждом n -м приближении связь между напряжениями и деформациями можно формально рассматривать как уравнения теории упругости, в которых коэффициенты Ламе зависят от координат: $\lambda = \lambda(r, z)$, $G = G(r, z)$. Зависимость λ и G от координат может быть получена, если учесть, что

$$\lambda = \frac{K}{3} - \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}; \quad G = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}, \quad (7)$$

принять во внимание законы деформирования (5) и рассматривать для n -го приближения компоненты напряжений как функции координат из предыдущего $(n-1)$ -го приближения.

Таким образом, на каждом этапе последовательных приближений решается система линейных дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях с переменными коэффициентами при соответствующих граничных условиях. Одно из этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} (2G + \lambda) + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} G + \frac{\partial w}{\partial z} \left(2 \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial w}{\partial r} \left(\frac{1}{r} G + \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} (\lambda + G) + \\ & + \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial G}{\partial r} + \frac{G + \lambda}{r} \right) + \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial z} + \frac{u}{r} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial z} + \gamma = 0, \quad (8) \end{aligned}$$

где w и u — соответственно перемещения вдоль оси z , направленной вертикально вниз, и вдоль радиуса, расположенного в горизонтальной плоскости, γ — объемный вес грунта.

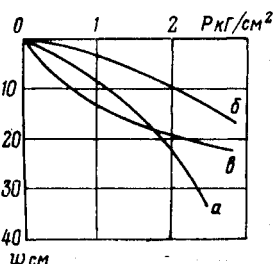


Рис. 3. Зависимость осадки от нагрузки для формулы (5,а) — а; (5,б) — б; (5,в) — в

Уравнения (8) решаются методом конечных разностей. На основании алгоритма, изложенного в работе [9], составлена программа для ЭВМ «Минск-22» решения задачи о вдавлении жесткого штампа радиуса R в нелинейно-деформируемое полупространство. Граничные условия задачи следующие:

$$\left. \begin{aligned} \omega = \omega_0, \quad u = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } r < R; \\ \sigma_z = 0, \quad \tau_{rz} = 0 \quad \text{при } r > R. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Поскольку перемещения грунта на некотором удалении от штампа затухают, для исследования массива можно ограничиться рассмотрением области конечных размеров. Расчеты показали, что если принять толщину слоя $H_1 = 8R$, а радиус слоя $T_1 = 16R$, то практически можно считать, что на нижней границе ($z = H_1$) отсутствуют перемещения ($w = 0, u = 0$), а на боковой поверхности ($r = T_1$) имеет место $\frac{\partial w}{\partial r} = 0, u = 0$.

Радиус штампа в расчете равен 7,5 м, следовательно, $H_1 = 60$ м, $T_1 = 120$ м.

Используя последовательное сгущение сетки, можно существенно уменьшить число рассматриваемых узлов, не снижая точности расчета. В данном случае сначала решается задача во всей области $H_1 T_1$ с шагом сетки $h_1 = R/2,5$. На втором этапе рассматривается лишь часть этой области с размерами $H_2 = 1,76R, T_2 = 2,47R$, в которой решение уточняется. Граничные условия внутри массива ($z = H_2, r = T_2$) принимаются из предыдущего расчета путем интерполяции.

В отличие от способа, изложенного ранее [9], объемные силы были непосредственно включены в уравнения равновесия и, следовательно, интегрирование этих уравнений осуществлялось с учетом весомости грунта. В программу, составленную для ЭВМ «Минск-22», входит подпрограмма решения систем разностных уравнений до 3584 порядка с использованием только оперативной памяти машины.

Ниже рассматриваются результаты численного решения указанной задачи в соответствии с тремя деформационными зависимостями (5, а, б, в).

При решении задачи о действии штампа на прунтовое основание конечным результатом должна являться связь между средним давлением на штамп q и его осадкой w , а также эпюры реактивных давлений p , поскольку они являются определяющими при назначении размеров фундаментных конструкций.

На рис. 3 приведены графики осадки w от среднего давления q , отвечающие деформационным зависимостям (5, а, б, в). Как видно из них, зависимость между нагрузкой на штамп и осадкой криволинейная, а отношение q/w с ростом нагрузки уменьшается. Результаты расчетов, выполненных на основе зависимости (5,а), качественно совпадают с экспериментальными данными [10], полученными в опытах с песчаным основанием. Из рис. 3, кривая в следует, что использование деформационного закона (5,в) приводит к недооценке результатов — зависимость осадки штампа от нагрузки имеет кривизну, обратную наблюдаемой в опытах.

По данным численного решения построены эпюры реактивных давлений для использовавшихся трех деформационных зависимостей (рис. 4). Эпюры реактивных давлений, соответствующие деформационной зависимости (5,а) — песчаный грунт без сцепления — даны на рис. 4,а. Эпюра при нагрузке на штамп 1 кг/см^2 имеет седлообразный вид. Максимальное давление, равное $1,2q$, получено на расстоянии $0,1R$ от края штампа. В центре штампа реактивное давление равно $0,80q$. При $q = 2 \text{ кг/см}^2$ точка с максимальным реактивным давлением $1,14q$ находится уже на расстоянии $0,36R$ от края. Давление в центре растет быстрее нагрузки и составляет q при $q = 2 \text{ кг/см}^2$. Таким образом, с ростом нагрузки эпюра реактивных давлений стремится к параболической.

Эпюры для зависимости (5,б) — связанный грунт, на деформацию сдвига которого не влияет среднее давление (рис. 4,б), качественно повторяют картину, полученную при использовании (5,а). Однако эпюры в этом случае имеют большую седлообразность, не наблюдаемую в опытах с незаглубленными штампами на песчаном основании. С ростом нагрузки давление под штампом несколько выравнивается. При использовании деформационного закона (5,в) эпюры реактивных давлений (рис. 4,в) имеют пики под краями штампа, причем с ростом нагрузки величина давлений под краями штампа интенсивно растет.

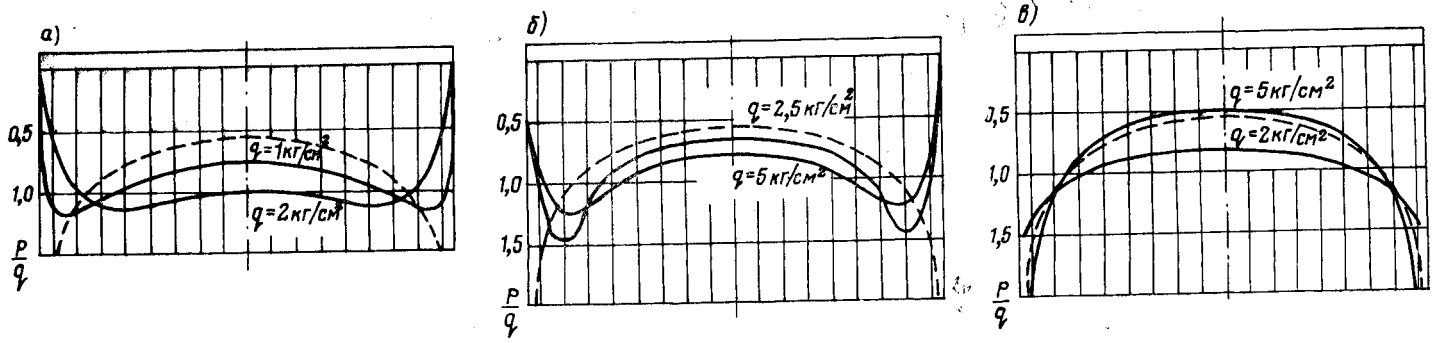


Рис. 4. Эпюры реактивных давлений, отнесенных к среднему давлению q

На графиках распределения перемещений (рис. 5,а), деформаций (рис. 5,б) и напряжений (рис. 5,в) по глубине, а также осадки поверхности основания (рис. 6) цифрами 1, 2, 3 обозначены результаты решений с использованием соответственно зависимостей (5,а), (5,б), (5,в), пунктиром — результаты решения по теории упругости.

Перемещения и деформации по оси штампа (рис. 5,а и б) качественно имеют тот же характер, что и в линейной среде. Осадки поверхности (рис. 6) затухают несколько быстрее. Основание в этом случае обладает большей распределительной способностью и напряжения σ_z (рис. 5,в) с глубиной уменьшаются интенсивнее, чем в линейной среде. Распределение напряжений σ_z по глубине, соответствующее зависимости (5,в), наиболее близко к распределению напряжений по теории упругости.

Затухание вертикальных перемещений w и деформаций ϵ_z по оси штампа (см. рис. 5,а и б) происходит значительно быстрее, чем в линейно-деформируемой среде. Сжатие слоя толщиной $3R$ на 94% определяет осадку штампа и лишь 6% осадки определяются деформацией нижележащего грунта (для линейно-деформируемой среды соответственно 70 и 30%). Перемещения в плане (см. рис. 6) затухают также быстро — точки с нулевой осадкой находятся на расстоянии $0,2R$ от края штампа. При этом для зависимости (5,а) получено образование характерного «валика» на поверхности вблизи штампа.

Расчеты, выполненные по наиболее соответствующей грунтам зависимости (5,а), подтверждают наличие так называемой «активной» зоны. Именно на этом экспериментально установленном факте базируется модель грунтового основания в виде слоя конечной толщины. Такая модель предполагает, что на некоторой глубине деформируемость основания настолько снижается, что ею можно пренебречь.

Однако наши расчеты показали, что концентрация деформаций в некоторой зоне основания является следствием не столько увеличения модуля деформации по глубине, сколько наличием зоны повышенной деформируемости у края штампа.

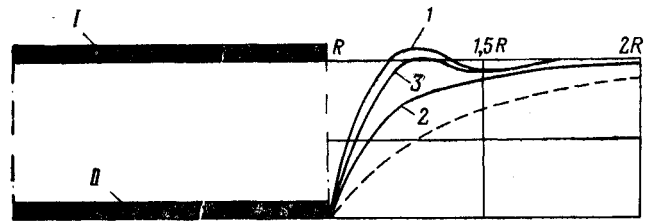


Рис. 6. Кривые осадки поверхности основания у штампа
I — положение штампа до деформации; II — после деформации;
1—в форме 5а; 2—5б; 3—5в; пунктир — по теории упругости

Рассмотрим изменение деформируемости в радиальном сечении. На рис. 7 изображены линии равных модулей сдвига, полученные при использовании зависимости (5,а). Из анализа этих линий видно, что вблизи края штампа образуется зона повышенной деформируемости при сдвиге. Распределительная способность основания вследствие этого здесь минимальна. Поэтому до некоторой глубины в работу включается лишь та часть основания, которая расположена непосредственно под штампом. В верхней зоне вся нагрузка от штампа воспринимается частью основания в виде цилиндра, радиус которого близок к радиусу штампа. Деформации здесь будут больше, нежели в однородной линейно-деформируемой среде.

Экспериментально установлено, что при определенной нагрузке под штампом образуется «упругое ядро». Приведенные нами результаты позволяют проследить образование области, в которой это ядро появляется. На рис. 7 пунктирная линия соединяет точки, в которых модуль сдвига при увеличении нагрузки не меняется. Внутри области, ограниченной пунктиром, деформируемость основания непрерывно падает. Естественно предположить, что в пределах этой области и образуется упругое ядро, которое при некоторой нагрузке начнет перемещаться совместно со штампом.

В Ы В О Д Ы

1. При исследовании напряженно-деформированного состояния грунтового основания теория малых упруго-пластических деформаций при допределельных нагрузках дает возможность получить результаты, качественно совпадающие с экспериментальными.

2. Способ учета собственного веса грунта имеет существенное значение. В частности, применение принципа наложения приводит к эпюрам реактивных давлений и зави-

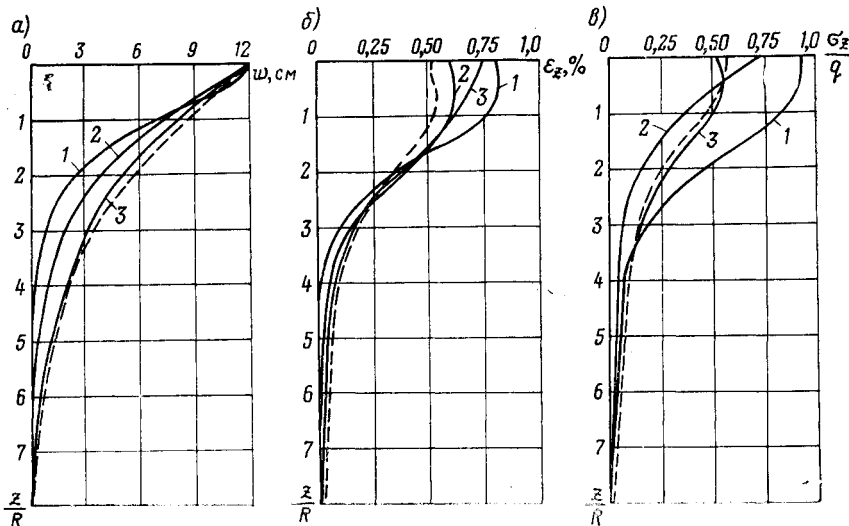


Рис. 5. Кривые распределений перемещений (а), деформаций (б) и напряжений (в) по глубине

симостям $w(q)$, не вполне отвечающим экспериментальным данным. Кроме того, в этом случае граница области уплотнения под штампом меняется с изменением нагрузки. Включение собственного веса в уравнения равновесия устраняет эти недостатки.

3. Несоответствие между результатами эксперимента и решениями, основанными на гипотезе линейно-деформируемой среды, в значительной степени объясняется нелинейностью сдвиговой деформации в грунтах. Для незаглубленного круглого штампа, опирающегося на песчаное основание, зависимость (5,а) обуславливает результаты, качественно совпадающие с опытными.

4. Уменьшение реактивных давлений под краями штампа, по сравнению с решением по теории упругости, объясняется, в первую очередь, влиянием второго инварианта девиатора напряжений (или деформаций). Зависимость в форме (5,б) приводит к эпюрам реактивных давлений, которые наблюдаются под штампами на глинистом основании.

5. Зависимость (5,в), не учитывающая влияние сдвигаемой деформации на величину модуля сдвига, дает результаты, противоречащие опытным.

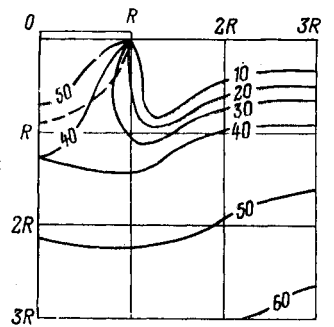
6. Глубина активной зоны определяется, главным образом, развитием областей повышенной деформируемости при сдвиге под краями штампа, а не возрастанием модуля деформации по глубине.

7. Показано, что под штампом образуется область, деформируемость которой с увеличением нагрузки падает, причем границы ее не зависят от нагрузки. По-видимому, в этой области и образуется «упругое» ядро, наблюдаемое в экспериментах.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Боткин. О прочности сыпучих и хрупких материалов. Известия НИИГ, т. 26, 1940.
2. Г. М. Ломизе, А. Л. Крыжановский. Основные зависимости напряженного состояния и прочность песчаных грунтов. «Основания, фундаменты и механика грунтов», 1966, № 3.

Рис. 7. Линии равных модулей сдвига G , кг/см²



3. М. В. Малышев. Распределение напряжений и деформаций в нелинейно-деформируемом основании, нагруженном сосредоточенной силой. «Основания, фундаменты и механика грунтов», 1963, № 2.
4. Ю. К. Зарецкий. К расчету ленточных фундаментов на нелинейно-деформируемом и неоднородном основании. «Основания, фундаменты и механика грунтов», 1965, № 1.
5. М. И. Горбунов-Посадов. О путях развития теории расчета конструкций на упругом основании. «Основания, фундаменты и механика грунтов», 1963, № 1.
6. А. А. Ильшин. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
7. Э. Д. Фрадис. Вопросы деформируемости и прочности песчаных грунтов в условиях сложного напряженного состояния. Автореферат кандидатской диссертации. НИИ оснований, 1969.
8. Е. Ф. Винокуров. Моренные грунты как основания сооружений. «Наука и техника», Минск, 1968.
9. В. И. Широков. Теоретическое исследование напряженно-деформированного состояния сыпучей среды, нагруженной посредством круглого штампа. «Основания, фундаменты и подземные сооружения». Труды Пятой научно-технической конференции молодых научных работников, НИИ оснований, 1969.
10. Г. А. Скорин. Статьи в сборнике «Основания, фундаменты и подземные сооружения». Труды Четвертой научно-технической конференции молодых научных работников. НИИ оснований, 1968.