М.В.МАЛЫШЕВ

Научно-исследователь - ский институт основа - ний и подземных сооружений Госстроя СССР

ОБОБЩЕННОЕ УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ МОРА-КУЛОНА ДЛЯ ГРУНТОВ

Краткое содержание

В докладе предлагается обобщение гипотезы прочности Кулона-Мора, в котором предполагается, что реальная поверхность скольжения является шероховатой в отличие от идеальной гладкой по - верхности, с которой мы встречаемся в статике сыпучей среды.

Такое предположение позволяет учесть влияние всех трех главных напряжений на прочность грунта и установить характеристики прочности, инвариантные относительно напряженного состояния.

Для грунтов, находящихся в предельно напряженном состоянии, почти всегда используется условие прочности Мора, по которому прочность сыпучего или связного грунта в рассматриваемой точке зависит только от соотношения между наибольшим σ_1 и наименьшим σ_3 главными напряжениями. Среднее главное напряжение σ_2 при этом может быть любым, лишь бы выполнялось условие $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$ (Соколовский, 1954). Условие прочности по Мору при наличии прямолинейной огибающей предельных кругов, то есть основное уравнение, используемое в статике сыпучей среды (Соколовский, 1954), находящейся в состоянии неполного (Березанцев, 1953) предельного равновесия, записывается следующим образом

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_3 + 2c \operatorname{Cot} \varphi \qquad (\mathrm{I})$$

где C – сцепление, φ – угол внутреннего трения. Гипотеза прочности Мора основывается на условии Кулона и сводится к тому, что напряженное состояние в точке становится предельным, когда максимальное значение функции $F = /\tau_n/ - \sigma_n \tan\varphi - C$ обращается в нуль, то есть

$$F = \left\{ /\tau_n/ - \sigma_n \tan\varphi \right\}_{max} - C = 0 \qquad (2)$$

Здесь τ_n и σ_n соответственно касательное и нормальное напряжения, действующие на площадке с внешней нормалью n . В грунтах разрушение происходит обычно из-за нарушения связей между частицами и взаимного сдвига отдельных частиц или зерен. Эти связи могут нарушаться как вследствие механического воздействия на грунт – изменения его напряженного состояния, так и вследствие изменения физического состояния грунта – плотности, влажности, сцепления.

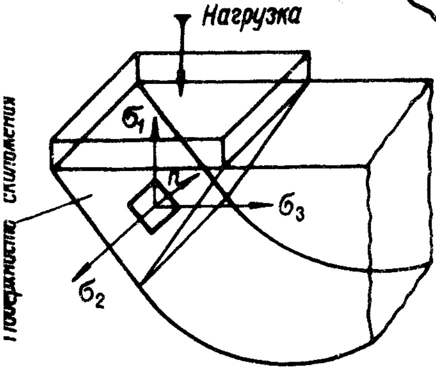
Недостатком гипотезы прочности Мора является неучет среднего главного напряжения; в другой же теории прочности Мизеса-Боткина (Боткин,1940), в которой среднее главное напряжение входит наравне с наибольшим и наименьшим, его влияние оказывается слишком сильным, что не отвечает опытным данным многих исследователей.

Поэтому целесообразно иметь такую теорию прочности, которая значительно ближе отвечала бы данным экспериментов и была бы физически оправдана. Ниже рассматривается механическая теория прочности грунта, с помощью которой представляется возможным выявить влияние изменения напряженного состояния на его прочность при практически неизменном физическом состоянии. Поскольку, как уже было сказано, нарушение связей между частицами вызывает их взаимный сдвиг и при умеренных давлениях лишь в малой степени обмятие контактов и разрушение самих частиц (Цытович,1963), наиболее оправданным представляется использование условия прочности Кулона, которое приведет в частных случаях и к условию прочности Мора, где среднее главное напряжение не учитывается и к условию прочности Мизеса-Боткина, где среднее главное напряжение входит наравне с наибольшим и наименьшим (Малышев,1963).

В теории предельного равновесия обычно принимается однородность сыпучей среды и тем самым предполагается, что скольжение кинематически возможно именно по той площадке, для которой вы -

полняется условие (2). В действительности же сыпучая среда н е является однородной в том смысле, что сдвиг в ней возможен только вдоль контактов частиц грунта без среза самих частиц. П р и этом происходит переориентирование самих частиц, поворот их , а также их незначительное деформирование. Возникающая у контактов между частицами концентрация напряжений вызывает, естестве н н о некоторое обмятие и разрушение самих частиц при тех давлениях , которые нас интересуют. Это явление относительно незначитель н о и считается, что в целом взаимный сдвиг частиц происходит вдоль контактов. Таким образом, в силу сказанного, сыпучую среду следует рассматривать как среду неоднородную, где сдвиг одних ча - стиц грунта по другим может в основном происходить только вдоль контактов между ними.

При сдвиге в условиях плоской деформации теоретические по - верхности скольжения принимаются цилиндрическими с прямолиней - ной образующей, параллельной оси главных напряжений σ_2 (рис.I).



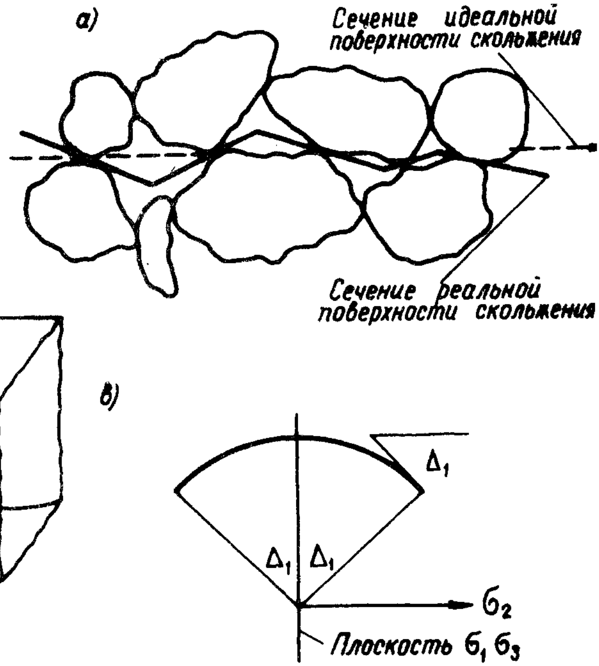


Рис.I

Рис.2

Таким образом, образующей служит прямая, совпадающая по направлению с осью σ_2 (рис.I). Практически же это будет не прямая линия, а ломаная, так как ее следует проводить, огибая частицы по контактам, а не пересекая их (рис.2а). Площадки сдвига отклоняются от этой средней линии на различные углы, значения которых в каждом отдельном случае, естественно, не известны. Можно, например, считать (Малышев,1963), что угол наклона Δ равновероятен в интервале от $-\Delta_1$, до $+\Delta_1$, где $\pm\Delta_1$ – наибольший угол отклонения и, таким образом, все промежуточные значения углов заключены в пределах $-\Delta_1 \leqslant \Delta \leqslant \Delta_1$.

Однако такую равновероятность можно допустить лишь в первоначальный момент до сдвига, так как в дальнейшем произойдет переориентирование частиц и равновероятность наклона уже не будет иметь места, то есть функция распределения этих углов в процессе сдвига будет меняться.

Естественно предположить, что значения углов отклонения Δ вследствие переориентирования частиц уменьшатся, что соответствует разуплотнению грунта при сдвиге. Если обозначить произвольный угол наклона площадки через Δ, причем, как уже говорилось $-\Delta_1 \leqslant \Delta \leqslant \Delta_1$, то в случае равновероятности наклона мы получим уравнение дуги окружности (рис.2в). В последующем, при сдвиге число площадок с малыми значениями Δ будет увеличиваться, а с большими значениями Δ – уменьшаться. Зависимость Мора можно будет получить, считая, что для всех площадок, имеющих наклон $\Delta = 0$, вероятность равна единице, а для случая $\Delta \neq 0$, она равна нулю.

Ниже, в целях упрощения, рассмотрим случай равновероятности наклона площадок в направлении сдвига и перпендикулярном к нему (рис.3), совпадающим с осью σ_2.

Как известно, нормальное напряжение на любой площадке с нормалью n обозначаемое σ_n и касательное напряжение, действующее на ту же площадку τ_n, равны

$$\sigma_n = (\sigma_1 - \sigma_3)\ell^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3$$

$$\tau_n^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2)\ell^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)m^2 + \sigma_3^2 - \sigma_n^2 \tag{3}$$

Здесь ℓ и m – направляющие косинусы углов, образуемых направлениями главных напряжений с нормалью n (см.рис.I).

Подставляя выражение (3), в равенство (2) и отыскивая максимум путем приравнивания частных производных $\partial F/\partial \ell$ и $\partial F/\partial m$

нулю, мы получили бы хорошо известные из статики сыпучей среды (Соколовский, 1954) выражения для направляющих косинусов ℓ и m то есть

$$\ell^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \sin\varphi\right); \qquad m = 0 \tag{4}$$

Однако, в той постановке, которая принимается нами, в формулу (2) следует подставить не величины напряжений, действующие по какой-то определенной площадке с нормалью n, а средние значения напряжений, действующих в пределах отклонения площадок от площадки с нормалью n. Последнее станет более понятным из рис.2а.

Под средним значением касательного напряжения будем понимать величину

$$\tau_{n,av} = \sqrt{\frac{\int_{\ell_1}^{\ell_2}\int_{m_1}^{m_2} \tau_n^2\, d\ell\, dm}{\int_{\ell_1}^{\ell_2}\int_{m_1}^{m_2} d\ell\, dm}} \tag{5}$$

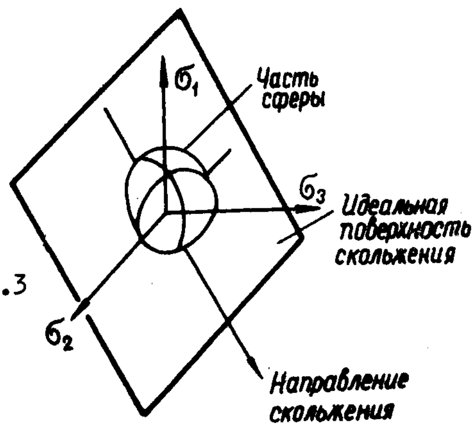


Рис.3

Здесь интегрирование производится для τ_n, взятого в квадрате, поскольку в выражении (2) τ_n входит по модулю. Под средним нормальным напряжением понимается величина

$$\sigma_{n,av} = \frac{\int_{\ell_1}^{\ell_2}\int_{m_1}^{m_2} \sigma_n\, d\ell\, dm}{\int_{\ell_1}^{\ell_2}\int_{m_1}^{m_2} d\ell\, dm} \tag{6}$$

В связи с тем, что нами принято условие равенства предельного значения наклона $\pm\,\Delta_1$, в обоих направлениях, то с учетом выражений (4) можно получить следующие пределы интегрирования, входящие в зависимости (5) и (6).

$$l_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} + \Delta\right); \qquad l_2 = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \Delta_1\right)$$

$$m_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \Delta_1\right) = -\sin\Delta_1; \qquad m_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Delta_1\right) = \sin\Delta_1 \tag{7}$$

Выполняя интегрирование в указанных пределах, будем иметь :

$$\int_{l_1}^{l_2}\int_{m_1}^{m_2} dl\,dm = 4\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\cdot \sin^2\Delta_1 \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{n,av} &= \frac{1}{6}\left(\sigma_1 - \sigma_3\right)\left[2\cos^2\Delta_1\left(1 - 2\sin\varphi\right) + 1 + \sin\varphi\right] + \\ &+ \frac{1}{3}\left(\sigma_2 - \sigma_3\right)\sin^2\Delta_1 + \sigma_3 = \frac{1}{3}\left\{\alpha_1\sigma_1 + \alpha_3\sigma_2 + \left[3 - \left(\alpha_1 + \alpha_2\right)\right]\sigma_3\right\} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \tau_{n,av} = \frac{1}{45}\Big\{ & 3\left(5\alpha_1 - 3\alpha_2\right)\sigma_1^2 + 3\left(5\alpha_3 - 3\alpha_4\right)\sigma_2^2 - \\ & -\left(9\alpha_2 + 9\alpha_4 + 5\alpha_1\alpha_3\right)\sigma_3^2 - 5\alpha_1\alpha_3\sigma_1\sigma_2 + \\ & +\left(18\alpha_4 + 5\alpha_1\alpha_3 - 15\alpha_3\right)\sigma_2\sigma_3 + \left(18\alpha_2 + 5\alpha_1\alpha_3 - 15\alpha_1\right)\sigma_1\sigma_3\Big\} \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\alpha_1 = \left(1 - 2\sin\varphi\right)\cos^2\Delta_1 + \frac{1}{2}\left(1 + \sin\varphi\right)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \left(4\sin^2\varphi - 2\sin\varphi - 1\right)\cos^4\Delta_1 + \\ &+ \left(2 - \sin\varphi - 3\sin^2\varphi\right)\cos^2\Delta_1 + \frac{1}{4}\left(1 + \sin\varphi\right)^2 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\alpha_3 = \sin^2\Delta_1; \qquad \alpha_4 = \sin^4\Delta_1 = \alpha_3^2$$

Поскольку в рассматриваемом нами случае имеется в виду предельное состояние, а $\tau_{n,av}$ и $\sigma_{n,av}$ относятся к площадкам скольжения, то равенство (2) перепишем следующим образом:

$$\tau_{n,av} - \sigma_{n,av} \tan \varphi - C \tag{12}$$

или

$$\tau^2_{n,av} - \sigma^2_{n,av} \tan^2 \varphi = 2C\sigma_{n,av} \tan \varphi + C^2 \tag{13}$$

Подставляя в формулу (13) зависимости (9) и (10), получим после преобразований следующее условие прочности

$$\begin{aligned} &a_{11}\sigma_1^2 + a_{22}\sigma_2^2 + a_{33}\sigma_3^2 + a_{12}\sigma_1\sigma_2 + a_{23}\sigma_2\sigma_3 + a_{31}\sigma_3\sigma_1 = \\ &= C\left(a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3\right) + C^2 \end{aligned} \tag{14}$$

В уравнении (14) коэффициенты выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} &a_{11} = \frac{1}{45}\left(15\alpha_1 - 9\alpha_2 - 5\alpha_1^2 \tan^2 \varphi\right) \\ &a_{22} = \frac{1}{45}\left(15\alpha_3 - 9\alpha_4 - 5\alpha_3^2 \tan^2 \varphi\right) \\ &a_{33} = -\frac{1}{45}\left[9\alpha_2 + 9\alpha_4 + 5\alpha_1\alpha_3 + 5\left(3 - \alpha_1 - \alpha_3\right)^2 \tan^2 \varphi\right] \\ &a_{12} = -\frac{1}{9}\alpha_1\alpha_3\left(1 + 2\tan^2 \varphi\right) \\ &a_{23} = \frac{1}{45}\left[18\alpha_4 + 5\alpha_1\alpha_3 - 15\alpha_3 - 10\alpha_3\left(3 - \alpha_1 - \alpha_3\right)\tan^2 \varphi\right] \\ &a_{31} = \frac{1}{45}\left[18\alpha_2 + 5\alpha_1\alpha_3 - 15\alpha_1 - 10\alpha_1\left(3 - \alpha_1 - \alpha_3\right)\tan^2 \varphi\right] \\ &a_1 = \frac{2}{3}\alpha_1 \tan \varphi \\ &a_2 = \frac{2}{3}\alpha_3 \tan \varphi \\ &a_3 = \frac{2}{3}\left[3 - \left(\alpha_1 + \alpha_3\right)\right]\tan \varphi = 2\tan \varphi - a_1 - a_2 \end{aligned} \tag{15}$$

Условие прочности (I4) имеет довольно сложный вид. В частном случае $\Delta_1 = 0$ оно превращается в хорошо известное условие прочности Мора (I).

Как следует из условия (I4), в него входят все три глав н ых напряжения, и, таким образом, обобщение условия прочности Мора , изложенное выше, приводит к тому, что учитывается влияние сред - него главного напряжения на прочность грунта. На влияние среднего главного напряжения на прочность уже неоднократно указывалось экспериментаторами (Малышев, 1954, 1963; Киркпатрик,1957, Хабиб, 1953; Корнфорс,1964, Сибата,1965), причем во всех эксперимента х получалось, что влияние это меньшее, чем по Мизесу-Боткину(Бот - кин, 1940).

На рис.4 приведены результаты эксперимента с дробью(Малышев, 1963). Если была бы верна гипотеза прочности Мора, то опыт н ы е точки легли бы на концы отрезков в прямых 4, а если бы гипоте за

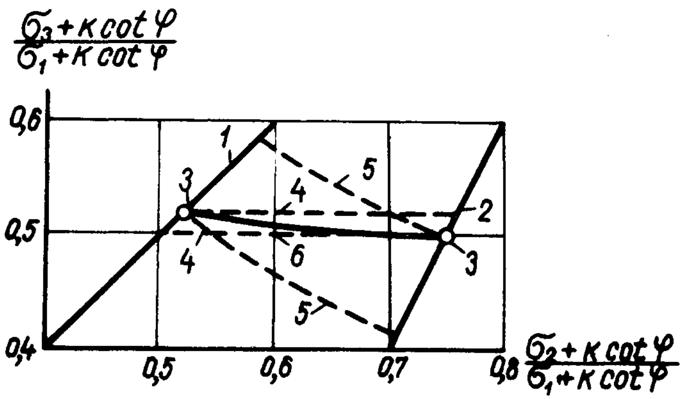


Рис.4 Результаты экспериментов с дробью
I- трехосное сжатие; 2- кручение; 3- опытные точки - средний результат всех опытов; 4- зависимость

$$\frac{\sigma_3 + c\cot\varphi}{\sigma_1 + c\cot\varphi} = f\left(\frac{\sigma_2 + c\cot\varphi}{\sigma_1 + c\cot\varphi}\right)$$

по Мору (обычная); 5- та же зависимость по условию Мизеса-Боткина; 6- та же зависимость по предлагаемой гипотезе.

Мизеса-Боткина, то они легли бы на концы отрезков эллипсов 5. В действительности они занимают промежуточное положение, причем ложатся ближе к Мору, чем к Мизесу-Боткину.

Обработка результатов экспериментов по предложенной гипотезе прочности сводится к отысканию параметров φ и C, не зависящих от пористости грунта и параметра Δ_1, являющегося функцией пористости.

Тот угол внутреннего трения, которые мы обычно определяем, является некоторой функцией углов φ и Δ_1, и совпадает с истинным углом внутреннего трения лишь в наиболее рыхлом состоянии грунта, когда $\Delta_1 = 0$.

Чем более угол Δ_1, тем более кажущийся угол внутреннего трения. Для того, чтобы установить эти параметры, требуется провести при одном и том же физическом состоянии грунта 2 испытания при одной комбинации главных направлений и одно испытание при другой комбинации главных напряжений. Для грунтов, лишенных сцепления, необходимо провести, как минимум, два испытания при различных напряженных состояниях. При трехосном испытании ($\sigma_2 = \sigma_3$) для грунта, лишенного сцепления, условие (I4) будет таким

$$a_{11} + \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right)_t (a_{31} + a_{12}) + \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right)_t^2 (a_{22} + a_{33} + a_{23}) = 0 \tag{I6}$$

а при плоской деформации, когда

$$\sigma_2 = \nu(\sigma_1 + \sigma_3)$$

таким

$$a_{11} + a_{12}\nu + a_{22}\nu^2 + \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right)_p \left(2a_{22}\nu^2 + a_{12}\nu + a_{23}\nu + a_{31}\right) + \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right)_p^2 \left(a_{22}\nu^2 + a_{23}\nu + a_{33}\right) = 0 \tag{I7}$$

Зная из опытов отношения $(\sigma_3/\sigma_1)_t$ и $(\sigma_3/\sigma_1)_p$ соответствующие разрушению грунта, можно путем подбора установить φ и Δ_1. В связи со сложностью условия прочности (I4), представляется возможным с достаточной для практических целей точностью заменить его линейным уравнением вида

$$A_1\sigma_1 + A_2\sigma_2 + A_3\sigma_3 = C \tag{I8}$$

где коэффициенты A_I, A_2, и A_3 являются зависящими от φ и Δ.

Такое упрощение равносильно линейной аппроксимации выражения (5) с последующим использованием условия (I2).

ВЫВОДЫ

I. Экспериментальные данные показывают, что ни гипотеза прочности Мора, ни, тем более, гипотеза прочности Мизеса–Боткина, не дают характеристик прочности, инвариантных относительно напряженного состояния.

2. При введении предположения о несовпадаемости реальных площадок скольжения с идеальными удается учесть влияние среднего главного напряжения и получить характеристики прочности, инвариантные относительно напряженного состояния.

ЛИТЕРАТУРА

Березанцев В.Г. 1953. Осесимметричная задача теории предельного равновесию сыпучей среды. Гостехиздат, Москва.

Боткин А.И. О прочности сыпучих и хрупких материалов. Известия ВНИИ Гидротехники, т.26, Ленинград.

Kirkpatrick W.M. 1957. The condition of Failure for Sands. Proc. 4-th Jnt. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng. vol. I London.

Cornforth D.H. 1964. Same experiments on the influence of strain conditions on the strength of sand. Geotechnique 2, London.

Малышев М.В., 1954. Об определении угла внутреннего трения и сцепления предельнонапряженной сыпучей среды. Известия АН СССР, ОТН, № 7, Москва.

Малышев М.В., 1963. О влиянии среднего главного напряжения на прочность грунта и о поверхностях скольжения. "Основания, фундаменты и механика грунтов", № I, Москва.

Shibata T., Karube D. 1965. Influence of the variation of the intermediabe principal stress on the mechanical properties of clays. Proc. of the 6-th Int. Confer. on Soil Mech. and Found. Eng. vol. I. Canada.

Соколовский В.В. 1964. Статика сыпучей среды. Гостехиздат, Москва

Habib P.1953. Influence of the Variation of the Average principal Stress upon the Shearing Strenght of Soils. Proc. of the 3-rd Int.Conf.on Soil Mech. and Found. Eng. vol I, Zürich.

Цытович Н.А., 1963. Механика грунтов, Стройиздат, Москва.